Introduzione

Il nucleo principale della teoria di base delle algebre associative semplici consiste nei tre seguenti risultati[1] dovuti a Wedderburn (1907):

(I) *Sia D un corpo, $n \in \mathbb{N}$. Allora $D^{n\times n}$ è un'algebra associativa semplice su $Z(D)$.*

(II) *Sia A un'algebra associativa unitaria semplice di dimensione finita su $Z(A)$. Allora esiste un corpo D e $n \in \mathbb{N}$ tale che $A \cong D^{n\times n}$.*

(III) *Siano $m, n \in \mathbb{N}$, D, E corpi tali che $D^{n\times n} \cong E^{m\times m}$. Allora vale $m = n$, $E \cong D$.*

Di conseguenza, le algebre associative semplici di dimensione finita su un campo K sono tutte e sole le algebre matriciali sulle algebre di divisione di dimensione finita su K, a meno di isomorfismi. Poi, a meno di isomorfismi, le algebre di divisione in una tale descrizione sono uniche. Questi risultati servono come punto di partenza per tutto quanto segue. Il risultato chiave della teoria scoperta da Wedderburn è la proposizione (II). Ricordiamo il punto saliente della dimostrazione:

Sia A un'algebra semplice di dimensione finita su un campo K. Giocherà un ruolo importante l'algebra opposta di A che denoteremo con A^-.[2] Per ogni ideale destro minimale R di A esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $A \cong R^n$, come A-moduli, dove l'azione di A è data tramite la moltiplicazione a destra, cioè, mediante l'omomorfismo di algebre

$$\rho : A \to \mathrm{End}(A, +),\ x \mapsto \begin{bmatrix} A & \to & A \\ y & \mapsto & yx \end{bmatrix}.$$

Essendo R un A-modulo irriducibile, si ha allora che l'A-modulo A è omogeneo, $\mathrm{End}_A R$ è algebra di divisione su K (per il Lemma di Schur), $\mathrm{End}_A R^n \cong (\mathrm{End}_A R)^{n\times n}$. La moltiplicazione a sinistra,

$$\lambda : A \to \mathrm{End}(A, +),\ x \mapsto \begin{bmatrix} A & \to & A \\ y & \mapsto & xy \end{bmatrix}$$

invece è un antiomomorfismo di A, quindi un omomorfismo di A^-,[3] e si ha

$$A \cong (\mathrm{End}_A R^n)^- \cong D^{n\times n}$$

dove $D := (\mathrm{End}_A R)^-$.

Un dettaglio molto importante è il fatto che a meno di isomorfismi, R è l'unico A-modulo irriducibile. Poi, ogni A-modulo di dimensione finita è completamente

[1] Per ogni algebra A e $n \in \mathbb{N}$ denotiamo con $A^{n\times n}$ l'algebra delle matrici $n \times n$ su A, con $Z(A)$ il centro di A. Se A è associativa unitaria (cioè ha un elemento neutro rispetto alla moltiplicazione) e semplice, allora $Z(A)$ è un campo.

[2] Una scrittura diffusa per l'algebra opposta di A è A^{opp}, anche A^{op}. Tale algebra nasce da A considerando il nuovo prodotto $x \circ y := yx$ per ogni $x, y \in A$.

[3] Vale $(xx')\rho = (x\rho)(x'\rho)$, $(xx')\lambda = (x'\lambda)(x\lambda)$ per ogni $x, x' \in A$.

riducibile. In altre parole, le rappresentazioni di dimensione finita di A permettono una descrizione molto semplice:
Per ogni A-modulo V di dimensione finita su K esiste un $k \in \mathbb{N}_0$ tale che $V \underset{A}{\cong} R^k$.
Notiamo come conseguenza:

Corollario. *Se V, W sono A-moduli tali che $\dim_K V = \dim_K W$, allora*

$$V \underset{A}{\cong} W.$$

Un esempio di ideale destro minimale di $D^{n\times n}$ è, per ogni $j \in \underline{n}$,[4] l'insieme R_j delle matrici $n \times n$ su D in cui al più la j-esima riga contiene elementi non nulli:

$$R_j := \left\{ \begin{pmatrix} & O & \\ d_{j,1} & \dots & d_{j,n} \\ & O & \end{pmatrix} \,\middle|\, d_{jk} \in D \right\}.$$

Grazie ai risultati di Wedderburn, lo studio delle algebre associative semplici di dimensione finita su un campo K si concentra su due problemi seguenti:

Problema 1 Come si possono descrivere le algebre di divisione di dimensione finita?

Problema 2 Data un'algebra di divisione D di di dimensione finita e $n \in \mathbb{N}$, come si analizza l'interno dell'algebra $D^{n\times n}$? [5]

Per quanto riguarda il Problema 2, vedremo che il passaggio da A ad $A^{n\times n}$ comporta fenomeni strutturali nuovi che meritano uno studio approfondito. Per quanto riguarda il Problema 1, va detto che le algebre di divisione – se non sono campi – nascono sempre con costruzioni non banali e raramente studiate nei corsi introduttivi. Però, i risultati (I), (II), (III) mostrano che esse sono di importanza centrale per la teoria delle algebre associative: *La teoria stabilita da Wedderburn può essere interpretata come riduzione dello studio delle algebre semplici di dimensione finita allo studio delle algebre di divisione di dimensione finita.* Un esempio famoso di algebra di divisione non commutativa – frequentemente l'unica presentata nei corsi di base – è quella dei quaternioni. Ricordiamo la sua definizione: Per ogni campo K di caratteristica $\neq 2$ si dice algebra dei quaternioni su K un'algebra associativa unitaria A di dimensione 4 su K generata da due elementi i, j tali che $i^2 = -1_A = j^2$, $ij = -ji$. [6] Si ha:

[4] $\underline{n} := \{j | j \in \mathbb{N}, j \leq n\}$ per ogni $n \in \mathbb{N}_0$.

[5] Dipende dalle proprietà che si studiano se il passaggio da un'algebra A all'algebra matriciale $A^{n\times n}$ è banale o meno. Per esempio è banale l'implicazione

$$A \text{ nilpotente} \Rightarrow A^{2\times 2} \text{ nilpotente}$$

mentre l'implicazione

$$A \text{ nil} \Rightarrow A^{2\times 2} \text{ nil}$$

è una forma della congettura di Köthe, rimasta aperta da 80 anni. A si dice nil se ogni elemento di A è nilpotente, il che è naturalmente una condizione molto più debole della nilpotenza di A. Se A è una $\mathbb{Q}$-algebra ed esiste un $n \in \mathbb{N}$ tale che $x^n = 0_A$ per ogni $x \in A$, allora ogni prodotto di $2^n - 1$ fattori in A dà 0_A (Nagata-Higman 1952, in questa forma dovuto a Woo Lee [**WL**] che anche diede una dimostrazione semplificata.) Per ulteriori dettagli rispetto alla congettura di Köthe e i suoi legami con altre congetture nella teoria degli anelli, v. per esempio [**Sm**].

[6] L'ultima condizione può essere sostituita con $(i + j)^2 = -2_A$. – È anche possibile studiare il caso in cui $\operatorname{char} K = 2$ ma ciò comporta fenomeni speciali che non hanno importanza nel nostro contesto.

Proposizione. *Per ogni campo K tale che* $\operatorname{char} K \neq 2$ *esiste a meno di isomorfismi un'unica algebra dei quaternioni $H(K)$ su K. Tale algebra è semplice e l'applicazione $K \to H(K)$, $c \mapsto c1_{H(K)}$, è un isomorfismo da K su $Z(H(K))$.*

Per (II), o $H(K) \cong K^{2\times 2}$ o $H(K)$ è un'algebra di divisione su K. Nel caso di un sottocampo K di $\mathbb{R}$, $H(K)$ è sempre un'algebra di divisione, mentre $H(\mathbb{C}) \cong \mathbb{C}^{2\times 2}$. Gli elementi i, j generano un sottogruppo moltiplicativo non abeliano di ordine 8, il cosiddetto gruppo dei quaternioni, in teoria dei gruppi normalmente denotato con Q_8. L'algebra di divisione $\mathbb{H} := H(\mathbb{R})$ è storicamente il primo esempio (1843) di algebra non commutativa e prende il suo nome, l'algebra di Hamilton, dal suo scopritore irlandese.

Per ogni K-algebra unitaria A poniamo

$$\iota : K \to A, \quad c \mapsto c1_A.$$

Allora ι è un monomorfismo e $K\iota \subseteq Z(A)$. L'algebra A si dice centrale su K se $K\iota = Z(A)$. Siccome ogni K-algebra è anche un'algebra su $Z(A)$ e, nel caso semplice, $Z(K)$ è un campo, *basta studiare le K-algebre centrali.* È facile vedere che per ogni corpo D e $n \in \mathbb{N}$

$$Z(D^{n\times n}) = \left\{ \begin{pmatrix} c & & O \\ & \ddots & \\ O & & c \end{pmatrix} \,\middle|\, c \in Z(D) \right\} \cong Z(D).$$

La nozione di algebra nel senso più generale richiede solo la struttura di gruppo abeliano $(A, +)$ nel quale è definita una seconda operazione (la moltiplicazione) tale che valgano le due leggi distributive. Un'algebra si dice unitaria se esiste un elemento neutro $1_A \neq 0_A$ rispetto alla moltiplicazione (dove 0_A è l'elemento neutro rispetto all'«addizione»+ data in A). Se $(A, +)$ è un K-modulo rispetto ad un anello commutativo unitario K e vale $c(xy) = (cx)y = x(cy)$ e $1_K x = x$ per ogni $x, y \in A$, $c \in K$, allora A si dice una K-algebra, e gli elementi di K si dicono scalari. Per ogni algebra A, $K := \mathbb{Z}$ è sempre una possibile scelta come anello di scalari.

E' restrittivo richiedere che A sia un'algebra su un *campo* K, cioè $(A, +)$ uno spazio vettoriale su K, – e questo è il caso al quale ci limiteremo in questa serie di lezioni.